ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.16 1985

УДК 514.75

Ю.И.Шевченко

О ФУНДАМЕНТАЛЬНО-ГРУППОВОЙ СВЯЗНОСТИ

Исходя из точки зрения двухъярусных расслоений, дан интерпретация двум частным случаям структурных уравнений Лаптева пространства с фундаментально-групповой связностью.

1.Структурные уравнения пространства элементов Лаптева ([1],с.317) запишем в подробном виде ([2]с.441)

$$d\omega^{s_0} = \omega^{p_0} \wedge \omega^{s_0}_{p_0}, \tag{1}$$

$$d\omega^{s_1} = \frac{1}{2} C^{s_1}_{p_1 q_1} \omega^{p_1} \wedge \omega^{q_1} + C^{s_1}_{p_1 q_2} \omega^{p_1} \wedge \omega^{q_2} + \omega^{p_0} \wedge \omega^{s_1}_{p_0}, \tag{2}$$

$$d\omega^{s_2} = \frac{1}{2} C^{s_2}_{p_2 q_2} \omega^{p_2} \wedge \omega^{q_2} + C^{s_2}_{p_1 q_2} \omega^{p_1} \wedge \omega^{q_2} + \frac{1}{2} C^{s_2}_{p_1 q_1} \omega^{p_1} \wedge \omega^{q_1} + \omega^{p_0} \wedge \omega^{s_2}_{p_0}, \tag{3}$$

где

$$s_0, p_0, q_0 = \overline{-R+1, 0}; \quad s_1, p_1, q_1 = \overline{1, r}; \quad s_2, p_2, q_2 = \overline{r+1, \tau},$$

а $C^{s_1}_{p_1 q_{12}}$, $C^{s_2}_{p_{12} q_{12}}$ -структурные постоянные τ-членной группы Ли G, содержащей $(\tau - r)$-членную подгруппу H, причем, например, индекс q_{12} принимает значения индексов q_1 и q_2. Из уравнений (1)-(3) следует, что пространство элементов является частным случаем главного двухъярусного ступенчато-расслоенного пространства ([3],с.286-287). Уравнения (I) - это структурные уравнения базы B - области R-мерного дифференцируемого многообразия. Представим пространство элементов Лаптева, с одной стороны, в виде главного расслоения $G(B)$, типовым слоем которого является группа G. Слой G, в свою очередь, есть главное расслоение $H(G/H)$ с базой -множеством левых смежных классов G/H и типовым слоем - подгруппой H. Уравнения (1),(2) - это структурные уравнения расширенной базы M. Пространство элементов представим, с другой стороны, в виде главного расслоения $H(M)$, типовым слоем которого служит подгруппа H. Расширенная база M есть расслоение $G/H(B)$ с базой B, типовым слоем G/H и структурной группой G.

Таким образом, пространство элементов Лаптева представлено в виде двух главных расслоений $G(B)$ и $H(M)$ где $G=H(G/H)$, $M=G/H(B)$. Это пространство естественно обозначить символом $H(G/H(B))$, отражающим его двухъярусную структуру.

2.Рассмотрим расслоение $G(B)$, структурные уравнения (2),(3) слоевых форм которого запишем в виде

$$d\omega^{s_{12}} = \frac{1}{2} C^{s_{12}}_{p_{12} q_{12}} \omega^{p_{12}} \wedge \omega^{q_{12}} + \omega^{p_0} \wedge \omega^{s_{12}}_{p_0} \quad (C^{s_1}_{p_2 q_2} = 0).$$

Связность в главном расслоении $G(B)$ задается по Лаптеву [4] с помощью форм $\tilde{\omega}^{s_{12}} = \omega^{s_{12}} - \Gamma^{s_{12}}_{p_0} \omega^{p_0}$, где компоненты объекта связности $\Gamma^{s_{12}}_{p_0}$ удовлетворяют уравнениям

$$d\Gamma^{s_{12}}_{p_0} - \Gamma^{s_{12}}_{q_0} \omega^{q_0}_{p_0} + \Gamma^{q_{12}}_{p_0} \omega^{s_{12}}_{q_{12}} + \omega^{s_{12}}_{p_0} = \Gamma^{s_{12}}_{p_0 q_0} \omega^{q_0}, \tag{4}$$

причем $\omega^{s_{12}}_{q_{12}} = C^{s_{12}}_{q_{12} p_{12}} \omega^{p_{12}}$. Внешние дифференциалы форм связности $\tilde{\omega}^{s_{12}}$ приводятся к виду

$$d\tilde{\omega}^{s_{12}} = \frac{1}{2} C^{s_{12}}_{p_{12} q_{12}} \tilde{\omega}^{p_{12}} \wedge \tilde{\omega}^{q_{12}} + R^{s_{12}}_{p_0 q_0} \omega^{p_0} \wedge \omega^{q_0}, \tag{5}$$

где компоненты объекта кривизны выражаются по формулам

$$R^{s_{12}}_{p_0 q_0} = \Gamma^{s_{12}}_{[p_0 q_0]} - \frac{1}{2} C^{s_{12}}_{p_{12} q_{12}} \Gamma^{p_{12}}_{[p_0} \Gamma^{q_{12}}_{q_0]}.$$

Полагая, что в уравнениях (1) формы $\omega^{s_0}_{p_0}$ имеют вид

$$\omega^{s_0}_{p_0} = R^{s_0}_{p_0 q_0} \omega^{q_0} + 2 R^{s_0}_{p_0 q_1} \tilde{\omega}^{q_1},$$

получим, что уравнения (1),(5) дают нам частный случай структурных уравнений пространства с фундаментально-групповой связностью ([1],с.311), выделяемый условиями

$$R^{s_0}_{p_1 q_1} = 0, \quad R^{s_{12}}_{p_{01} q_1} = 0.$$

3. Возьмем расслоение $H(M)$ со структурными уравнениями, записанными в виде

$$d\omega^{s_{01}} = \omega^{p_{01}} \wedge \Omega^{s_{01}}_{p_{01}},$$

$$d\omega^{s_2} = \frac{1}{2} C^{s_2}_{p_2 q_2} \omega^{p_2} \wedge \omega^{q_2} + \omega^{p_{01}} \wedge \Omega^{s_2}_{p_{01}},$$

где

$$\Omega^{s_0}_{p_1} = 0, \ \Omega^{s_{012}}_{p_0} = \omega^{s_{012}}_{p_0}, \ \Omega^{s_{12}}_{p_1} = \frac{1}{2} C^{s_{12}}_{p_1 q_1} \omega^{q_1} + C^{s_{12}}_{p_1 q_2} \omega^{q_2}.$$

Рассмотрим формы

$$\bar{\omega}^{s_2} = \omega^{s_2} - \Pi^{s_2}_{p_0} \omega^{p_0} - \Pi^{s_2}_{p_1} \omega^{p_1},$$

внешние дифференциалы которых имеют вид:

$$d\bar{\omega}^{s_2} = \frac{1}{2} C^{s_2}_{p_2 q_2} \bar{\omega}^{p_2} \wedge \bar{\omega}^{q_2} + \frac{1}{2} C^{s_2}_{p_1 q_1} \omega^{p_1} \wedge \omega^{q_1} + \omega^{p_0} \wedge \Delta\Pi^{s_2}_{p_0} +$$

$$+ \omega^{p_1} \wedge \Delta\Pi^{s_2}_{p_1} - \frac{1}{2} C^{s_2}_{p_2 q_2} \Pi^{p_2}_{p_{01}} \Pi^{q_2}_{q_{01}} \omega^{p_{01}} \wedge \omega^{q_{01}},$$

где

$$\Delta\Pi^{s_2}_{p_0} = d\Pi^{s_2}_{p_0} - \Pi^{s_2}_{q_0} \omega^{q_0}_{p_0} + \Pi^{q_2}_{p_0} \Omega^{s_2}_{q_2} - \Pi^{s_2}_{q_1} \omega^{q_1}_{p_0} + \omega^{s_2}_{p_0},$$

$$\Delta\Pi^{s_2}_{p_1} = d\Pi^{s_2}_{p_1} - \Pi^{s_2}_{q_1} \Omega^{q_1}_{p_1} + \Pi^{q_2}_{p_1} \Omega^{s_2}_{q_2} + C^{s_2}_{p_1 q_2} \omega^{q_2},$$

причем $\Omega^{s_2}_{q_2} = C^{s_2}_{q_2 p_2} \omega^{p_2}$. В соответствии с теоремой Картана-Лаптева [5] для задания связности в главном расслоении $H(M)$ необходимо и достаточно задать поле объекта связности $\Pi^{s_2}_{p_{01}}$ на расширенной базе M: $\Delta\Pi^{s_2}_{p_{01}} = \Pi^{s_2}_{p_{01} q_{01}} \omega^{q_{01}}$. Тогда формы связности $\bar{\omega}^{s_2}$ будут удовлетворять уравнениям

$$d\bar{\omega}^{s_2} = \frac{1}{2} C^{s_2}_{p_2 q_2} \bar{\omega}^{p_2} \wedge \bar{\omega}^{q_2} + \frac{1}{2} C^{s_2}_{p_1 q_1} \omega^{p_1} \wedge \omega^{q_1} +$$

$$+ \bar{R}^{s_2}_{p_{01} q_{01}} \omega^{p_{01}} \wedge \omega^{q_{01}}, \qquad (6)$$

где объект $\bar{R}^{s_2}_{p_{01} q_{01}}$, совпадающий с объектом кривизны лишь с точностью до постоянных слагаемых, имеет вид

$$\bar{R}^{s_2}_{p_{01} q_{01}} = \Pi^{s_2}_{[p_{01} q_{01}]} - \frac{1}{2} C^{s_2}_{p_2 q_2} \Pi^{p_2}_{[p_{01}} \Pi^{q_2}_{q_{01}]}.$$

З а м е ч а н и е 1. При менее детальном подходе, когда формы $\bar{\omega}^{s_2}$ записываются в компактной форме $\bar{\omega}^{s_2} = \omega^{s_2} - \Pi^{s_2}_{p_{01}} \omega^{p_{01}}$, для компонент объекта связности получаются уравнения

$$d\Pi^{s_2}_{p_{01}} - \Pi^{s_2}_{q_{01}} \Omega^{q_{01}}_{p_{01}} + \Pi^{q_2}_{p_{01}} \Omega^{s_2}_{q_2} + \Omega^{s_2}_{p_{01}} = \Pi^{s_2}_{p_{01} q_{01}} \omega^{q_{01}}.$$

В этом случае формы связности $\bar{\omega}^{s_2}$ удовлетворяют обычным уравнениям, из которых следуют уравнения (6).

4. Изучим расслоение $G/H(B)$, структурные уравнения слоевых форм которого запишем в виде

$$d\omega^{s_1} = \omega^{p_1} \wedge \Omega^{s_1}_{p_1} + \omega^{p_0} \wedge \omega^{s_1}_{p_0}.$$

Линейная дифференциально-геометрическая связность в расслоении $G/H(B)$ задается по В.И.Близникасу [6] с помощью форм $\bar{\omega}^{s_1} = \omega^{s_1} - L^{s_1}_{p_0} \omega^{p_0}$, причем компоненты объекта связности $L^{s_1}_{p_0}$ удовлетворяют уравнениям

$$dL^{s_1}_{p_0} - L^{s_1}_{q_0} \omega^{q_0}_{p_0} + L^{q_1}_{p_0} \Omega^{s_1}_{q_1} + \omega^{s_1}_{p_0} = L^{s_1}_{p_0 q_{01}} \omega^{q_{01}}. \qquad (7)$$

Внешние дифференциалы форм связности $\bar{\omega}^{s_1}$ имеют вид

$$d\bar{\omega}^{s_1} = \bar{\omega}^{p_1} \wedge (\Omega^{s_1}_{p_1} - L^{s_1}_{q_0 p_1} \omega^{q_0}) + R^{s_1}_{p_0 q_0} \omega^{p_0} \wedge \omega^{q_0}, \qquad (8)$$

где компоненты объекта кривизны выражаются по формулам

$$R^{s_1}_{p_0 q_0} = L^{s_1}_{[p_0 q_0]} + L^{s_1}_{[p_0|q_1|} L^{q_1}_{q_0]}.$$

Уравнения (6),(8) приведем к виду

$$\left\{ \begin{aligned} & d\bar{\omega}^{s_1} = \frac{1}{2} C^{s_1}_{p_1 q_1} \bar{\omega}^{p_1} \wedge \bar{\omega}^{q_1} + C^{s_1}_{p_1 q_2} \bar{\omega}^{p_1} \wedge \bar{\omega}^{q_2} + \\ & + R^{s_1}_{p_0 q_0} \omega^{p_0} \wedge \omega^{q_0} + 2R^{s_1}_{p_0 q_1} \omega^{p_0} \wedge \bar{\omega}^{q_1} + R^{s_1}_{p_1 q_1} \bar{\omega}^{p_1} \wedge \bar{\omega}^{q_1}, \qquad (9) \\ & d\bar{\omega}^{s_2} = \frac{1}{2} C^{s_2}_{p_2 q_2} \bar{\omega}^{p_2} \wedge \bar{\omega}^{q_2} + \frac{1}{2} C^{s_2}_{p_1 q_1} \bar{\omega}^{p_1} \wedge \bar{\omega}^{q_1} + \\ & + R^{s_2}_{p_0 q_0} \omega^{p_0} \wedge \omega^{q_0} + 2R^{s_2}_{p_0 q_1} \omega^{p_0} \wedge \bar{\omega}^{q_1} + R^{s_2}_{p_1 q_1} \bar{\omega}^{p_1} \wedge \bar{\omega}^{q_1}, \end{aligned} \right.$$

где

$$2R^{s_1}_{p_0q_1}=L^{s_1}_{p_0q_1}+\frac{1}{2}C^{s_1}_{p_1q_1}L^{p_1}_{p_0}+C^{s_1}_{p_2q_1}(\Pi^{p_2}_{p_0}+\Pi^{p_2}_{p_1}L^{p_1}_{p_0}),$$

$$R^{s_1}_{p_1q_1}=C^{s_1}_{[p_1|q_2|}\Pi^{q_2}_{q_1]},\quad R^{s_2}_{p_1q_1}=\bar{R}^{s_2}_{p_1q_1},$$

$$R^{s_2}_{p_0q_0}=\bar{R}^{s_2}_{p_0q_0}+2\bar{R}^{s_2}_{[p_0|q_1|}L^{q_1}_{q_0]}+(\bar{R}^{s_2}_{p_1q_1}+\frac{1}{2}C^{s_2}_{p_1q_1})L^{p_1}_{[p_0}L^{q_1}_{q_0]},$$

$$R^{s_2}_{p_0q_1}=\bar{R}^{s_2}_{p_0q_1}+(\bar{R}^{s_2}_{p_1q_1}+\frac{1}{2}C^{s_2}_{p_1q_1})L^{p_1}_{p_0}.$$

Выберем в уравнениях (1) формы $\omega^{s_0}_{p_0}$ в виде

$$\omega^{s_0}_{p_0}=R^{s_0}_{p_0q_0}\omega^{q_0}+2R^{s_0}_{p_0q_1}\bar{\omega}^{q_1},$$

тогда уравнения (I),(9) дают другой случай пространства с фундаментально-групповой связностью, выделяемый условиями $C^{s_2}_{p_1q_2}=0,\ R^{s_0}_{p_1q_1}=0$. Этот случай соответствует редуктивности однородного пространства G/H.

З а м е ч а н и е 2. Исходя из уравнений (4) и (7) запишем уравнения для компонент $\Gamma^{s_1}_{p_0}$ объекта связности $\Gamma^{s_{12}}_{p_0}$ и объекта связности $L^{s_1}_{p_0}$ следующим образом:

$$d\Gamma^{s_1}_{p_0}-\Gamma^{s_1}_{q_0}\omega^{q_0}_{p_0}+\Gamma^{q_1}_{p_0}C^{s_1}_{q_1p_2}\omega^{p_2}+\Gamma^{p_{12}}_{p_0}C^{s_1}_{p_{12}q_1}\omega^{q_1}+\omega^{s_1}_{p_0}=\Gamma^{s_1}_{p_0q_0}\omega^{q_0},$$

$$dL^{s_1}_{p_0}-L^{s_1}_{q_0}\omega^{q_0}_{p_0}+L^{q_1}_{p_0}C^{s_1}_{q_1p_2}\omega^{p_2}+\omega^{s_1}_{p_0}=\bar{L}^{s_1}_{p_0q_{01}}\omega^{q_{01}},$$

где

$$\bar{L}^{s_1}_{p_0q_0}=L^{s_1}_{p_0q_0},\quad \bar{L}^{s_1}_{p_0q_1}=L^{s_1}_{p_0q_1}-\frac{1}{2}C^{s_1}_{p_1q_1}L^{p_1}_{p_0}.$$

Отождествляя объекты $\Gamma^{s_1}_{p_0}$ и $L^{s_1}_{p_0}$, из записанных уравнений получим соотношения $\bar{L}^{s_1}_{p_0q_1}=C^{s_1}_{q_1p_{12}}\Gamma^{p_{12}}_{p_0}$, являющиеся условиями горизонтальности 1-го порядка ([2], с.454). Теперь объект $L^{s_1}_{p_0}$ будет задавать связность Ю.Г.Лумисте в однородном расслоении $G/H(B)$. В этом случае в системе (9) вместо форм $\bar{\omega}^{s_1}$ можно писать формы $\widehat{\omega}^{s_1}$.

З а м е ч а н и е 3. Отметим интересный момент, проявившийся во 2-й интерпретации. Мы использовали расслоение $G/H(B)$, типовой слой которого является общим однородным пространством, однако получили интерпретацию,

соответствующую редуктивному случаю.

Список литературы

1. Лаптев Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. -Тр.Моск.матем.об-ва, т.2. М., 1953, с.275-382.

2. Лумисте Ю.Г. Связности в однородных расслоениях. -Матем.сб., 1966, т.69, с.434-469.

3. Остиану Н.М. Ступенчато-расслоенные пространства. -Тр.геометрич.семинара, т.5. М., 1974, с.259-309.

4. Лаптев Г.Ф. Многообразия, погруженные в обобщенные пространства. -Тр. 4-го Всесоюзного матем. съезда (1961), т.2, Л., 1964, с.226-233.

5. Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П. Дифференциально- геометрические структуры на многообразиях. -Проблемы геометрии, т.9. М., 1979.

6. Близникас В.И. Неголономное дифференцирование Ли и линейные связности в пространстве опорных элементов. -Литовский математич.сб., 1966, №2, с.141-209.